

Essential Skills Mathematics

Studiewijzer

Module B

Formules manipuleren

Leerdoelen en onderwerpen

Leerdoelen

Na deze module bestudeerd te hebben moet je:

1. in algebraïsche uitdrukkingen haakjes kunnen wegwerken
2. een veelterm van de eerste en tweede graad kunnen ontbinden in factoren
3. uit een algebraïsche vergelijking een variabele kunnen isoleren

Onderwerpen

B.1. *Haakjes wegwerken*

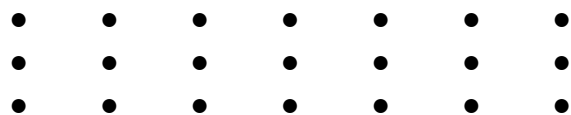
B.2. *Ontbinden in factoren*

B.3. *Isoleren van een variabele*

Antwoorden van de opgaven

B.1. Haakjes wegwerken

In algebraïsche berekeningen zijn haakjes noodzakelijk om deze berekeningen glashelder te laten verlopen. Zonder deze haakjes zouden geen duidelijke berekeningen mogelijk zijn. We zullen dit illustreren aan de hand van een figuur waarin 21 volkomen identieke knikkers gerangschikt zijn in drie rijen van 7 knikkers. Zie hieronder:

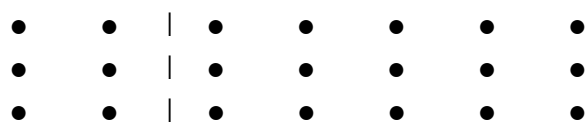


Het totale aantal knikkers is $7 + 7 + 7 = 21$. We schrijven ook $7 + 7 + 7 = 3 \cdot 7 = 21$, waarin een vermenigvuldiging staat van de getallen 3 en 7. Je ziet dus in dit voorbeeld dat een vermenigvuldiging niets anders is dan een herhaalde optelling, eigenlijk een verkorte notatie van een optelling. Maar je kunt op vele andere manieren naar bovenstaand figuur kijken. Je kunt er ook 7 kolommen van 3 knikkers in herkennen en dan schrijven $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 7 \cdot 3 = 21$. Je komt natuurlijk op hetzelfde eindresultaat uit en je ziet dan dat geldt $7 \cdot 3 = 3 \cdot 7$, de zogenaamde commutatieve wet van de vermenigvuldiging.

Kijk nu eens op de volgende manier naar het figuur: denk het figuur opgesplitst in drie rijen van 2 knikkers en 3 rijen van 5 knikkers. Het aantal knikkers is dan

$$2 + 2 + 2 + 5 + 5 + 5 = 6 + 15 = 21$$

Zie hieronder:

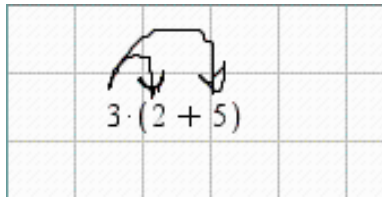


Blijkbaar geldt $3 \cdot 7 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5$

We kunnen 7 zien als de som van 2 en 5. Dus $7 = 2 + 5$. Willen we nu $2 + 5$ met een bepaald getal vermenigvuldigen, b.v. met 3, dan moeten we niet schrijven $3 \cdot 2 + 5$, want daar komt 11 uit. We moeten duidelijk aangeven dat we $2 + 5$ in zijn geheel met 3 vermenigvuldigen en dat doen we door haakjes om $2 + 5$ te plaatsen. Dus:

$$3 \cdot 7 = 3 \cdot (2 + 5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 6 + 15 = 21$$

Indien je dus 7 vermenigvuldigt met 3, dan mag je 7 in twee delen verdelen en dan deze 2 delen met 3 vermenigvuldigen. Het wegwerken van haakjes doe je dus op de onderstaande manier met behulp van kromme pijltjes.



$$3 \cdot (2 + 5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 6 + 15 = 21.$$

We hebben nu haakjes geïntroduceerd en gaan nu verder met de omgekeerde procedure: het wegwerken van haakjes. Er zijn in deze module drie typen expressies:

Type 1: $(x + a)(x + b)$

Voorbeelden.

$$(a + 1)(a + 7)$$

$$(a + 8)(a - 8)$$

$$(x - 10)(x + 3)$$

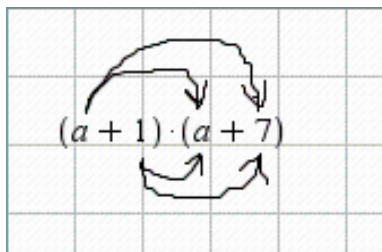
$$(10x + 3)(6x + 10)$$

$$(-4x + 9)(5x + 7)$$

Hier staan in feite producten van 2 getallen, bijvoorbeeld $(a + 1)$ en $(a + 7)$. Men spreekt van het product van twee *factoren*.

Voorbeeld $(a + 1)(a + 7)$

We werken de haakjes weg in $(a + 1)(a + 7)$. We doen weer als volgt met kromme pijltjes, ook wel papagaaienbek genoemd:



$$\text{Dan geldt } (a + 1)(a + 7) = a \cdot a + a \cdot 7 + 1 \cdot a + 7 = a^2 + 7a + a + 7.$$

Opgave B.1.1.

Werk van de volgende expressies de haakjes weg:

a) $(a + 8)(a - 8)$

b) $(10x + 3)(2x - 4)$

c) $(-5x - 13)(-4x - 3)$

[Maak op Maple T.A. de oefening: B.1.1. Haakjes wegwerken type 1](#)

Type 2: $a(x + b)^2$

Voorbeelden.

$$(x + 6)^2$$

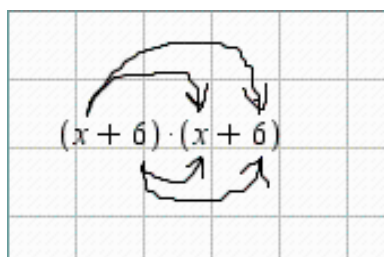
$$2(x - 4)^2$$

$$-9(x - 2)^2$$

Bij dit type moet een kwadraat uitgewerkt worden.

Voorbeeld $(x + 6)^2$

$(x + 6)^2$ is een afkorting voor $(x + 6)(x + 6)$. We gaan wederom met de papagaaienbek werken:



Dan geldt $(x + 6)^2 = (x + 6)(x + 6) = x \cdot x + 6x + 6x + 36 = x^2 + 12x + 36$.

We noemen dit wel een merkwaardig product, omdat NIET GELDT $(x + 6)^2 = x^2 + 36$, maar wel $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$. De term $12x$ heet wel de dubbele som van 6 en x .

Voorbeeld $2(x - 3)^2$.

We gaan de haakjes wegwerken van $2(x - 3)^2$. Eerst gaan we machtsverheffen $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$, let goed op de dubbele som in dit merkwaardig product. Dan gebruiken we de pijltjesmethode om met 2 te vermenigvuldigen $2(x - 3)^2 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2x^2 - 12x + 18$.

Opgave B.1.2.

Werk van de volgende expressies de haakjes weg:

a) $(x + 2)^2$

b) $(k - 3)^2$

c) $8(x - 4)^2$

d) $-3(p + 2)^2$

[Maak op Maple T.A. de oefening: B.1.2. Haakjes wegwerken type 2](#)

Type 3: $(x + a)^2 - (x + b)^2$

Bij dit type moet een som of verschil van twee kwadraten uitgewerkt worden.

Voorbeelden.

$$(a + 5)^2 - (a - 7)^2$$

$$(d + 7)^2 - (d - 8)^2$$

Voorbeeld $(a + 10)^2 - (a - 4)^2$

$(a + 10)^2 - (a - 4)^2$ betekent $(a + 10)(a + 10) - (a - 4)(a - 4)$.

Bij *type 2* hebben we gezien dat met behulp van het merkwaardig product geldt

$(a + 10)^2 = a^2 + 20a + 100$ en $(a - 4)^2 = a^2 - 8a + 16$. Je kunt hiervoor overigens ook de papagaaienbek gebruiken. Dan wordt $(a + 10)^2 - (a - 4)^2 = a^2 + 20a + 100 - (a^2 - 8a + 16) = a^2 + 20a + 100 - a^2 + 8a - 16 = 12a + 84$

Opgave B.1.3.

Werk van de volgende expressies de haakjes weg:

a) $(x + 2)^2 - (x + 2)^2$

b) $(a + 5)^2 - (a - 7)^2$

c) $(2x - 4)^2 - (3x + 2)^2$

[Maak op Maple T.A. de oefening: B.1.3. Haakjes wegwerken type 3](#)

B.2. Ontbinden in factoren

In dit deel van deze module doen we in zekere zin het omgekeerde van het wegwerken van haakjes: we introduceren en gebruiken nu haakjes om algebraïsche uitdrukkingen als een product van factoren te schrijven. Beschouw daartoe de volgende twee typen algebraïsche uitdrukkingen:

Type 1: $x^2 + bx + c$

Bij *Type 1* heb je een kwadratische term x^2 , een lineaire term x , $-4x$, $3x$ of iets dergelijks en als derde term is er een constante -20 , 3 , 17 of iets dergelijks.

Voorbeeld $x^2 + 12x + 20$

In deze uitdrukking kan x elk reëel getal zijn. Het is een som van drie termen, namelijk x^2 , $12x$ en 20 . Hoe moet je nu van deze som van drie termen nu een vermenigvuldiging maken? De oplossing wordt gepresenteerd in de vorm van vier stappen.

Stap 1: Je moet je aandacht allereerst richten op de derde term, dus op het getal 20 . Zie dit getal 20 als een product van twee gehele getallen. Je hebt dan in totaal 6 mogelijkheden $20 \cdot 1$, $-20 \cdot -1$, $10 \cdot 2$, $-10 \cdot -2$, $4 \cdot 5$, $-4 \cdot -5$

Stap 2: Kijk naar het getal dat in de tweede term voor x staat. Dit getal is 12 en wordt de coëfficiënt van x genoemd.

Stap 3: Zoek nu het getallenpaar waarvan de som gelijk is aan het getal uit *Stap 2*, dus aan 12 . Dat getallenpaar wordt gevormd door de getallen 2 en 10 .

Stap 4: Dit getallenpaar 2 en 10 geeft de oplossing, je kunt de algebraïsche uitdrukking $x^2 + 12x + 20$ nu schrijven als een product van de factoren $(x + 2)$ en $(x + 10)$.

Dus $x^2 + 12x + 20 = (x + 2)(x + 10)$.

Het voordeel van ontbinden in factoren is, dat je kunt zien voor welke waarden van x de uitdrukking $x^2 + 12x + 20$ nul wordt. Namelijk als de factor $(x + 2)$ nul wordt of als factor $(x + 10)$ nul wordt. Dit komt in module C1 veelvuldig aan de orde.

Voorbeeld $a^2 - 5a - 24$

De oplossing gaat weer in dezelfde vier stappen.

Stap 1: Je richt de aandacht allereerst weer op de derde term, dus op het getal -24. Zie dit getal -24 nu weer als een product van twee gehele getallen. Je hebt dan in totaal 8 mogelijkheden $24 \cdot -1$, $-24 \cdot 1$, $12 \cdot -2$, $-2 \cdot 12$, $8 \cdot -3$, $-3 \cdot 8$, $6 \cdot -4$, $-4 \cdot 6$

Stap 2: Kijk naar het getal dat in de tweede term voor a staat. Dit keer is -5 de coëfficiënt van a .

Stap 3: Zoek nu het getallenpaar waarvan de som gelijk is aan -5. Dit getallenpaar bestaat uit de getallen -8 en 3.

Stap 4: Dit getallenpaar geeft weer de oplossing $a^2 - 5a - 24 = (a - 8)(a + 3)$

Je ziet nu snel voor welke waarden van a de uitdrukking $a^2 - 5a - 24$ nul wordt. Namelijk als $(x - 8)$ nul wordt of als $(x + 3)$ nul wordt.

Opgave B.2.1.

Ontbind in factoren:

a) $x^2 - 4x - 21$

b) $x^2 + 3x - 70$

c) $x^2 + 10x + 16$

[Maak op Maple T.A. de oefening: B.2.1. Ontbinden in factoren type 1](#)

Type 2 : $x^2 - b^2$

Bij dit type 2 zien we een verschil van twee kwadraten, een ander bekend merkwaardig product tegen, dat algemeen geschreven wordt als: $x^2 - b^2 = (x + b)(x - b)$. Hierin kunnen zowel x als b elk getal zijn, als ook elke andere letter zijn.

Voorbeeld $x^2 - 4 = x^2 - 4^2 = (x + 2)(x - 2)$

De oplossing zit allereerst in het schrijven van de tweede term als een kwadraat en vervolgens de regel $x^2 - b^2 = (x + b)(x - b)$ toepassen.

Voorbeeld $k^2 - 16 = k^2 - 4^2 = (k + 4)(k - 4)$.

Opgave B.2.2.

Ontbind in factoren:

a) $b^2 - 9$

b) $x^2 - 169$

c) $u^2 - 25$

[Maak op Maple T.A. de oefening: B.2.2. Ontbinden in factoren type 2](#)

Type 3: $ax^2 + b$

Dit type lijkt op type 2, alleen staat er voor het eerste kwadraat een coëfficiënt. Dit los je op door allereerst de coëfficiënt van het eerste kwadraat buiten haakjes te halen en vervolgens de bekende techniek van *type 2* toe te passen.

Voorbeeld $4v^2 - 100 = 4(a^2 - 25) = 4(a + 5)(a - 5)$

Voorbeeld $-3a^2 + 48 = -3(a^2 - 16) = -3(a^2 - 4^2) = -3(a + 4)(a - 4)$

Opgave B.2.3.

Ontbind in factoren:

a) $4x^2 - 100$

b) $-5x^2 + 245$

c) $-3x^2 + 108$

[Maak op Maple T.A. de oefening: B.2.3. Ontbinden in factoren type 3](#)

B.3. Isoleren van een variabele

Bekijk de volgende algebraïsche vergelijking: $x^3y^3 + 10\sqrt{xy} - y^3 + xy - 2000x = 0$

We zien een vergelijking waarin zich twee variabele grootheden bevinden, namelijk x en y . Het is duidelijk dat als x in het linkerlid van de vergelijking van waarde verandert, dat dan y ook gaat veranderen, en wel zodanig dat het linkerlid in zijn totaliteit nul blijft. Er is dus een relatie tussen x en y . Dit type relatie wordt een impliciete relatie genoemd.

Het is in bovenstaande vergelijking onmogelijk om y expliciet te maken ofwel te “isoleren”. Isoleren betekent dat de vergelijking in de vorm wordt gebracht van $y = f(x)$, dus links staat alleen y en rechts staat een functie van x : een algebraïsche uitdrukking waarin alleen x als variabele voorkomt en niet meer y . Een vergelijking van de vorm $y = f(x)$, is dus een vergelijking waarin y expliciet is uitgedrukt in x . Men zegt ook wel: de variabele y is geïsoleerd of vrijgemaakt.

In het vervolg worden een paar voorbeelden gegeven waarin een impliciete variabele geïsoleerd moet worden ofwel expliciet gemaakt moet worden. De vergelijkingen zijn lineair en er zijn slechts een beperkt aantal technieken nodig om een gewenste variabele expliciet te maken. Elke stap zal zorgvuldig beschreven worden.

Voorbeeld $Kx - L + M = 0$

We gaan nu een expliciete uitdrukking voor x vinden. Dat gaat via de volgende stappen:

Stap 1: Breng de termen $-L$ en M naar de andere kant van de vergelijking. Indien je een term naar de andere kant van de vergelijking brengt, dan verandert die term van teken. Dus $-L$ wordt aan de rechterkant $+L$ en $+M$ wordt dan $-M$. Dan vinden we: $Kx = L - M$.

Stap 2: Links staat nu $K \cdot x$, maar we moeten daar x hebben. Dat kunnen we bereiken door door K te delen, maar dan moeten we ook het rechterlid door K delen. Dus:

$$\frac{Kx}{K} = \frac{L-M}{K}$$

Stap 3: We vereenvoudigen de breuk aan de linkerkant: $\frac{Kx}{K} = x$

Het eindresultaat wordt: $K = \frac{L-M}{K}$

Voorbeeld $x = \frac{y}{b} - z$.

In dit voorbeeld is nu b de variabele die expliciet gemaakt moet worden, die geïsoleerd moet worden. We doen dit weer in een aantal stappen.

Stap 1: Uiteindelijk moet b in de teller komen, want we willen een uitdrukking van de vorm $b = \dots$. Dan ligt het voor de hand om de gehele vergelijking met b te vermenigvuldigen. Dan verdwijnt b uit de noemer. Dus: $bx = b(\frac{y}{b} - z)$

Stap 2: In het rechterlid werken we nu de haakjes weg door de twee afzonderlijke termen tussen haakjes met b te vermenigvuldigen: $bx = y - bz$

Stap 3: We hebben nu twee termen met b erin en het ligt voor de hand deze termen samen te voegen. Dan is het het meest voor de hand liggend om de term $-bz$ naar het linkerlid te brengen. De term $-bz$ verandert dan van teken en wordt $+bz$. We krijgen dan: $bx + bz = y$

Stap 4: Vervolgens passen we de techniek van buiten haakjes halen toe. In de termen bx en bz zit de gemeenschappelijke factor b , en die mogen we buiten haakjes halen: $b(x + z) = y$

Stap 5: Nog een laatste stap rest ons. We hebben nu links $b(x + z)$, maar we moeten alleen maar b hebben. Dus dan moeten we net zoals in het vorige voorbeeld het linkerlid en rechterlid delen. Deze keer delen we door $(x + z)$: $\frac{b(x+z)}{x+z} = \frac{y}{x+z}$

Stap 6: Omdat de factor $(x + z)$ links zowel in de teller als in de noemer mogen we $(x + z)$ tegen elkaar wegstrepen. In feite deel dan links de teller en de noemer door hetzelfde getal namelijk $(x + z)$. Het eindresultaat wordt: $b = \frac{y}{(x + z)}$

Opgave B.3.1.

Isoleer x uit de volgende vergelijking:

a) $s = \frac{x}{b - c}$

b) $m - n = \frac{c}{x + b}$

c) $3x - bx = \frac{a}{n}$

[Maak op Maple T.A. de oefening: B.3.1. Isoleren van een variabele](#)

Antwoorden van de opgaven

Opgave B.1.1.

a) $(a + 8)(a - 8) = a^2 - 64$

b) $(10x + 3)(2x - 4) = 20x^2 - 34x - 12$

c) $(-5x - 13)(-4x - 3) = 20x^2 + 67x + 39$

Opgave B.1.2.

a) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

b) $(k - 3)^2 = k^2 - 6k + 9$

c) $8(x - 4)^2 = 8x^2 - 64x + 128$

d) $-3(p + 2)^2 = -3p^2 - 12p - 12$

Opgave B.1.3.

a) $(x + 2)^2 - (x + 2)^2 = 0$

b) $(a + 5)^2 - (a - 7)^2 = 24a - 24$

c) $(2x - 4)^2 - (3x + 2)^2 = -5x^2 - 28x + 12$

Opgave B.2.1.

a) $x^2 - 4x - 21 = (x - 7)(x + 3)$

b) $x^2 + 3x - 70 = (x + 10)(x - 7)$

c) $x^2 + 10x + 16 = (x + 8)(x + 2)$

Opgave B.2.2.

a) $b^2 - 9 = (b + 3)(b - 3)$

b) $x^2 - 169 = (x - 13)(x + 13)$

c) $u^2 - 25 = (u - 5)(u + 5)$

Opgave B.2.3.

a) $4x^2 - 100 = 4(x + 5)(x - 5)$

b) $-5x^2 + 245 = -5(x - 7)(x + 7)$

c) $-3x^2 + 108 = -3(x - 6)(x + 6)$

Opgave B.3.1.

a) $x = 5(b - c)$

b) $x = \frac{c}{m-n} - b$

c) $x = \frac{a}{n(3-b)}$